

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем

Пашкин Всеволод Дмитриевич

Выпускная квалификационная работа магистра

**Процессы фильтрации в пористых средах пластов и
нефтяных скважин**

Направление 03.04.01 Прикладные математика и физика

Научный руководитель
Доктор физ.-мат. наук
Профессор
Курбатова Г.И.

Научный консультант
Главный специалист
Департамента научно-технологических разработок
ООО «Газпромнефть НТЦ»
Лежнев К.Э.

Санкт-Петербург

2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	5
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	6
ГЛАВА 1. Фильтрация в пористых средах	9
1.1. Моделирование пористых сред	9
1.2. Линейная фильтрация в поровом пространстве	11
1.3. Фильтрация в околоскважинной зоне пласта.....	16
ГЛАВА 2. Моделирование образования фильтрационной корки	19
2.1. Свойства фильтрационной корки	19
2.2. Математическая модель нарастания фильтрационной корки	20
ГЛАВА 3. Математическая модель гравийного фильтра	27
3.1. Численная реализация модели фильтрации в поровом пространстве.....	27
3.2. Результаты численного моделирования	29
3.3. Критерий подбора гравийного фильтра	34
ВЫВОДЫ	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	39
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	40
ПРИЛОЖЕНИЕ	43

ВВЕДЕНИЕ

Процессы фильтрации в пористых средах наблюдаются в разнообразных природных и технологических процессах. Примерами таких процессов могут служить просачивание воды через почву, протекание нефти в пласте и подобные явления, в которых жидкость движется по разветвлённой системе сообщающихся между собой пор. Первые исследования по фильтрации жидкости сквозь пористые структуры были осуществлены французскими инженерами-механиками А. Дарси и Ж. Дюпюи [1].

Задачи фильтрации нашли свое отражение и в технологических процессах, связанных с добычей полезных ископаемых. Для промывки скважин от продуктов бурения используются специальные смеси полимеров с механическими частицами – буровые растворы. При закачке в пласт буровой раствор способен проникать в околоскважинную зону пласта, снижая ее проницаемость. Ухудшенные свойства призабойной зоны могут привести к существенному снижению продуктивности скважины.

Разработка месторождений, сложенных слабосцементированными породами (песок, глина, алевролиты), часто сопровождается разрушением призабойной зоны пласта и выносом механических частиц в скважину. При попадании в скважину песок может привести к эрозии погружного оборудования в скважине и увеличению эксплуатационных расходов. Для снижения доли песка в притоке используются различные скважинные фильтры, как например фильтры с гравийной набивкой, щелевые, проволочные фильтры и т.д.

Гравийный фильтр – один из универсальных способов предотвращения выноса песка в скважину. Он создает сложную поровую структуру на входе в скважину, которая способна удерживать в себе частицы песка. Однако, при

достаточном засорении на фильтре также может образовываться фильтрационная корка, существенно снижающая проницаемость в околоскважинной зоне пласта. Работу гравийных фильтров с учетом образования фильтрационной корки можно моделировать при помощи законов сохранения масс и закона сохранения импульса в виде соответствующего закона фильтрации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В выпускной квалификационной работе ставилась задача изучения математических моделей фильтрации в поровом пространстве. Модель образования фильтрационной корки разработана в виде программного кода. Особенностью задачи является осреднение параметров фильтрационной корки по длине фильтрации, что позволяет обойти ограничение в виде подвижной границы.

Поставленную задачу моделирования фильтрации в пористых средах можно разбить на следующие подзадачи:

- Анализ имеющихся в научной литературе математических моделей фильтрации в пористых средах.
- Разработка физико-математической модели образования фильтрационной корки.
- Создание модели и алгоритма расчета засорения фильтра с гравийной набивкой.
- Оценка оптимального размера гранул гравийного фильтра в зависимости от геологического строения месторождения.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Проблема моделирования фильтрации в пористых средах получила широкое распространение в российской и зарубежной литературе. При фильтрации суспензии происходит захват твердых частиц, что приводит к ухудшению фильтрационных характеристик порового пространства. Фундаментальные модели пористых насыщенных сред представлены в работах Лейбензона [2], Христиановича [3], Нигматулина [4].

В целом, работы по данной тематике можно разделить на две основные группы: моделирование фильтрации в глубине порового пространства (т.н. Deep bed filtration) и моделирование образования фильтрационной корки (т.н. Cake filtration).

В работе Herzig et al. [5] впервые была дана математическая постановка задачи засорения фильтра на основе законов сохранения масс. Для описания застревания и отрыва частиц в поровом пространстве в правой части закона сохранения масс вводятся новые параметры, отвечающие за изменение объемной доли частиц в потоке жидкости: интенсивность засорения и интенсивность отрывания частиц. Авторами предполагается, что данные параметры пропорциональны скорости потока, объемной доли взвешенных и застрявших частиц. Дополнительно в правую часть уравнения вводятся коэффициенты пропорциональности – коэффициенты захвата λ и β . Rajagopalan and Tien [6] и Wennberg and Sharma [7] в своих работах вывели аналитическое выражение для концентрации взвешенных частиц в фильтре при условии неизменности коэффициента захвата λ .

На процесс фильтрации флюидов в значительной мере влияет размер застревающих частиц. При значительной засоренности пор крупные частицы уже не способны проникнуть в поровое пространство, таким образом они

будут оседать на стенке фильтра, образуя фильтрационную корку. Основополагающей работой по представленной проблеме является монография С. Tien [8], в которой автор приводит различные механизмы осаждения частиц на поверхности фильтра, рассматривает математическую постановку данной задачи, приводит различные замыкающие соотношения для моделей фильтрационной корки.

Помимо поперечной фильтрации, фильтрационная корка может формироваться и в результате тангенциальной фильтрации (cross flow filtration), когда поток частиц с флюидом проходит параллельно фильтрационному пространству. Данный механизм детально описан в работе Jiao and Sharma [9].

Представленные фильтрационные механизмы с учетом полидисперсного распределения частиц по размерам могут быть объединены в единый процесс для моделирования фильтров, как это сделано в работах Suri and Sharma [10], Sacramento et.al. [11]

При протекании флюида с механическими примесями сквозь пористую среду частицы оседают на стенках пор, образуя упаковки с определенной пористостью и проницаемостью. Такие упаковки неустойчивы, и при достижении критической скорости фильтрации возможен срыв застрявших частиц обратно в поток. Данные физические эффекты были учтены в математических моделях фильтрации в работах Боронина и др. [12], [13]

Существует ряд научных работ [14], [15], [16], в которых авторы описывают эксперименты по фильтрации суспензий. Базовой работой по эмпирическому исследованию фильтрации частиц в пористой среде является статья Iwasaki et.al. [14], в которой авторами регистрировалась концентрация вытекающей суспензии при фильтрации ее через насыпку песка. И впервые было выдвинуто предположение, что профиль концентрации частиц в фильтре имеет экспоненциальный вид.

В статье Mackie R.I., Horner R.M.W, Jarvis R.J. [15] авторы в результате серии экспериментов по фильтрации порошковой суспензии определили диапазон значений коэффициента захвата β .

В диссертации Рыжикова [16] автор по результатам фильтрационных тестов выносит на защиту новые методы определения коэффициентов захвата частиц и снижения проницаемости фильтра.

Однако, многие вопросы по данной теме так и остаются открытыми. Как например, критерий начала образования фильтрационной корки, физико-химические процессы, происходящие при протекании флюида через фильтрационную корку, расчет изменения ее проницаемости.

Глава 1. Фильтрация в пористых средах

1.1. Моделирование пористых сред

Основным параметром, характеризующим пористую структуру, является пористость φ , которая представляет собой отношение объема пор к общему объему сплошной среды. Моделирование пористых структур может осуществляться на различных масштабах: субпоровом и макромасштабе.

В первом случае (субпоровом масштабе) скелет пористой среды обычно считается неподвижным, а движение флюида рассчитывается исходя из решения уравнения Навье-Стокса, а скелет используется как граничное условие.

В случае моделирования на макромасштабе происходит осреднение пористой среды на масштабе существенно больше размера поры и отдельного зерна и вводятся средние параметры среды, такие как проницаемость. Законы сохранения также осредняются по некоторому репрезентативному масштабу.

При решении фильтрационных задач часто используется предположение о малости характерного размера пор по сравнению с линейными размерами пористой среды. Таким образом, среду можно рассматривать как сплошную среду с осредненными по некоторой окрестности характеристиками (плотность, пористость).

Для анализа движения жидкости или газа в пористых средах используются законы сохранения массы и закон фильтрации. При малых числах Рейнольдса ($Re \ll 1$) для расчетов скорости фильтрации используется линейный закон фильтрации Дарси, который может быть получен осреднением закона Навье-Стокса в масштабе пор, он имеет вид $\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p$, где \vec{v} – скорость фильтрации, k – коэффициент проницаемости пористой среды, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, ∇p – градиент

давления. В случаях больших скоростей фильтрации ввиду преобладания инерционных сил над силами вязкостью используется закон фильтрации Форхгеймера [17], который имеет вид $-\nabla p = \frac{\mu}{k} \vec{v} + \frac{\beta \rho}{\sqrt{k}} |\vec{v}| \vec{v}$, где β – дополнительная константа пористой среды, определяемая экспериментально, ρ – плотность жидкости.

Основные предположения о механизме застревания частиц, используемые в данной работе, сформулированы в наших работах [18], [19]. Воспользуемся предположением из работы [18]. Рассматривается суспензия, состоящая из несущего флюида и твердых частиц шарообразной формы, которые будут разделены на отдельные классы с характерными диаметрами $d_1 > d_2 > \dots > d_n$. Частицы диаметра d_1 могут застревать в начальной пористой среде, диаметра d_2 – свободно проходят сквозь начальную пористую среду, но могут застревать в порах, образованных первыми частицами. Если предположить подобие упаковки, диаметры d_1, d_2, \dots, d_n могут образовывать геометрическую прогрессию. Ее знаменатель можно определить из геометрических соображений, рассматривая различные варианты упаковки частиц [20], которые продемонстрированы на Рис. 1.

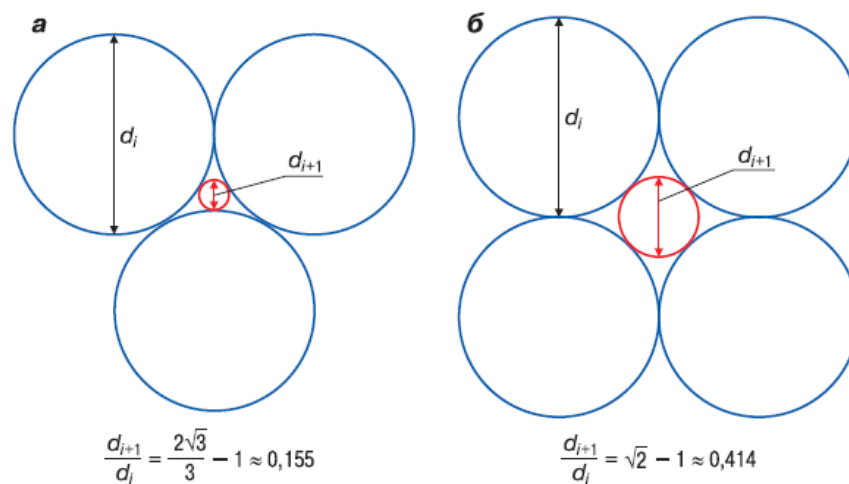


Рис. 1. Соотношение размеров пор для гексагональной (а) и кубической (б) упаковок

1.2. Линейная фильтрация в поровом пространстве

Для описания процессов застревания частиц в поровом пространстве используется одномерная линейная модель фильтрации [7], [10], [11], [12], рассматривающая процесс протекания флюида и частиц в порах.

Будем рассматривать многокомпонентную суспензию, которая содержит несущий флюид и частицы, которые будут характеризоваться диаметром $d_i, i = \overline{1, N}$ (далее вместо выражения *частица диаметра d_i* может использоваться *частица типа i*). Частицы могут пребывать в двух различных состояниях: либо частицы движутся вместе с флюидом, либо частицы застряли в поровом пространстве. Для флюида и частиц i -го типа выпишем законы сохранения масс следуя работе [7]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \varphi_f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \varphi_f v_f) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c_i \varphi_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_s c_i \varphi_i v_s) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s \sigma_i) = 0. \quad (2)$$

Здесь ρ_f – плотность несущего флюида (в данной работе будет рассматриваться нефть), σ_i – объемная доля застрявших твердых частиц типа d_i , c_i – объемная доля подвижных частиц типа d_i в потоке, φ_f – объемная доля поровых каналов, доступная для протекания флюида, φ_i – объемная доля поровых каналов, в которых могут двигаться частицы диаметра меньше либо равного d_i , ρ_s – плотность частиц, v_f и v_s – скорость флюида и частиц соответственно.

Введем дополнительную величину q_{si} – интенсивность застревания частиц i -ого типа. Определим q_{si} также, как предложено в работе [12] :

$$\begin{aligned} q_{s1} &= \lambda_1 c_1 v = \lambda_0 (1 - \varphi_0 + \beta_0 \sigma_1) c_1 v, \\ q_{si} &= \lambda_i c_i v = \lambda_i (\sigma_{i-1} + \beta_i \sigma_i) c_i v, i = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (3)$$

где v – скорость фильтрации, λ_1 – коэффициент захвата, который определяется как доля частиц диаметра d_1 , осевших в порах при прохождении ими расстояния в 1 м, λ_1 размерность м^{-1} , λ_i – коэффициент захвата частиц i -го типа, λ_0, β_0 – коэффициенты захвата в начальный момент времени.

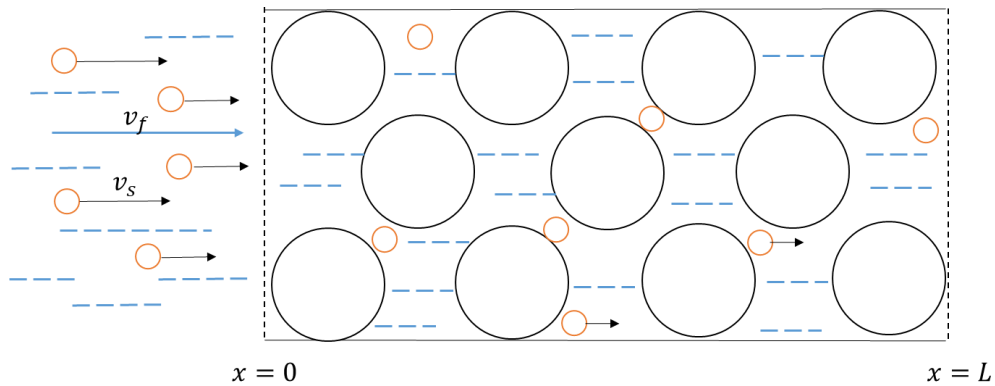


Рис. 2. Прохождение суспензии через пористую среду

При фильтрационном течении частицы застревают в поровом пространстве, уменьшая пористость среды (Рис. 2). Таким образом, необходимо определить пористость φ_f , в которой может двигаться флюид, и пористость φ_i для частиц i -го типа. Определим φ_1 как объемная доля пространства, в которой могут течь частицы диаметром меньше либо равные d_1 . Эти частицы могут перемещаться в поровом объеме, образованном частицами d_0 , но и также в порах, образованных застрявшими частицами типа d_1 [13]:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\sigma_1}{C_{max}}, \quad (4)$$

где d_0 – диаметр частиц, из которых сложена пористая среда, φ_0 – начальная пористость среды, C_{max} – максимальная плотность упаковки частиц в моносистеме.

Замечание 1. Стоит отметить, что довольно часто в расчетах используют модель «фиктивного грунта», представляющего собой регулярную засыпку из сферических частиц постоянного диаметра. Макроскопические структурные

характеристики такой среды в основном определяются способом упаковки частиц и в меньшей степени их диаметром. В частности, теоретическое значение объемной пористости P_v для случая, когда характерные линейные размеры выделенного объема много больше диаметров частиц определяется по формуле Слихтера [21] $P_v(\alpha) = 1 - \frac{\pi}{6(1-\cos(\alpha))\sqrt{1+2\cos(\alpha)}}$.

Данная формула была выведена для пористости в неограниченной среде, но в модели «фиктивного грунта» дополнительный объем порового пространства вблизи границы области будет пренебрежимо малым по сравнению с общим объемом пористой среды, что позволяет применять формулу Слихтера в большинстве практических расчетов [22].

В работе будем исходить из предположения, что C_{max} не зависит от типа частиц d_i . Тогда для произвольно типа частиц пористость, в которой могут двигаться частицы, выражается следующим образом:

$$\varphi_i = \varphi_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j - \frac{\sigma_i}{C_{max}}. \quad (5)$$

Таким образом, система уравнений, описывающих движение многокомпонентной суспензии в пористой среде будет состоять из $2N+1$ уравнений: уравнений переноса и захвата частиц в пористой среде для N типов подвижных и N типов неподвижных твердых частиц, где N – количество типов частиц, закона сохранения массы для несущего флюида и замыкающих соотношений для пористости φ_f [18] и пористости φ_i :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \varphi_f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \varphi_f v_f) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_i c_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_i c_i v_s) = -q_{si}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = q_{si}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (8)$$

$$\varphi_i = \varphi_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j - \frac{\sigma_i}{C_{max}}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (9)$$

$$\varphi_f = \varphi_0 - \sum_{i=1}^n \sigma_i - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i; \quad (10)$$

$$t = 0, \quad \sigma_i = 0, c_i = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad (11)$$

$$t > 0, x = 0, \quad \sigma_i = 0, c_i = c_0(t), i = \overline{1, N}; \quad (12)$$

В данной модели (6) – закон сохранения массы (ЗСМ) для флюида, (7) – уравнение переноса твердых частиц типа d_i в пористой среде, (8) – уравнение захвата твердых частиц типа d_i в пористой среде, (9) – объемная доля поровых каналов, образованная частицами диаметра d_{i-1} , в которых могут перемещаться частицы меньше либо равного d_i , (10) – объемная доля поровых каналов, доступная для флюида, (11) – начальное условие для объемной доли захваченных и взвешенных частиц, (12) – граничное условие для объемной доли захваченных и взвешенных частиц.

Условие (11) отражает отсутствие захваченных и взвешенных частиц в начальный момент времени, (12) – условие того, что частицы не застревают на границе $x = 0$ порового пространства; объемная доля взвешенных частиц, поступающих на вход в поровое пр-во, может изменяться во времени.

Для замыкания системы уравнений (6) – (12) необходимо задание зависимостей для проницаемости k и вязкости μ , а также соотношения для интенсивности застревания частиц и скорости флюида.

Скорость фильтрации описывается линейным законом фильтрации Дарси, в котором учитывается зависимость вязкости от объемной доли взвешенных твердых частиц в потоке и проницаемости от пористости

$$\vec{v} = -\frac{k(\sum_{j=1}^n \sigma_j)}{\mu(\sum_{j=1}^n c_j)} \nabla p. \quad (13)$$

Здесь $k = k(\sum_{j=1}^n \sigma_j)$ – коэффициент проницаемости поровой среды, $\mu = \mu(\sum_{j=1}^n c_j)$ – коэффициент динамической вязкости флюида, ∇p – градиент давления.

Плотность флюида связана с давлением следующим образом [23]:

$$\rho_f = \rho_f^0 e^{c_f(p-p^0)}, \quad (14)$$

где ρ_f^0 – плотность флюида при некотором давлении p_0 , c_f – коэффициент сжимаемости. Однако, во многих расчетах флюид можно считать несжимаемым, т.е. $c_f = 0$.

Коэффициент проницаемости определяется по формуле, предложенной в работе [24]:

$$k(\varphi) = k_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{4.57}, \quad (15)$$

где R_0 и R – начальный и текущий средний радиус пор породы, φ_0 и φ – начальная и текущая пористость, k_0 – начальная проницаемость.

Коэффициент динамической вязкости флюида определяется по формуле, предложенной в работе [25]:

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{c(x, t)}{C_{max}} \right)^{-1.89}, \quad (16)$$

где μ_0 – коэффициент динамической вязкости в начальный момент времени, C_{max} – максимальная плотность упаковки частиц в монодисперсной системе (Замечание 1), $c(x, t)$ – объемная доля взвешенных частиц всех типов.

Линейная модель при некоторых упрощениях имеет аналитическое решение. Вводится «скорректированное время» $\theta = t - \int_0^x \frac{dx'}{u(x')\varphi(x')}$ (время в любой точке по оси x , необходимое для достижения суспензией этой точки), где $u(x')$ – скорость фильтрации, $\varphi(x')$ – пористость, В работе [7] для концентрации взвешенных и застрявших в поровом пространстве частиц были выведены следующие выражения, которые имеют силу только при постоянных значениях коэффициента λ :

$$\begin{aligned} c(x) &= c^* e^{-\lambda_0 x}, \theta > 0; c(x) = 0, \theta < 0, \\ \sigma(x, \theta) &= \lambda_0 u \theta c^* e^{-\lambda_0 x}, \theta > 0; \sigma(x, \theta) = 0, \theta < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь c^* – объемная доля взвешенных частиц на вход в пористую среду в монодисперсной системе

В работе [7] было также представлено аналитическое решение для уравнения объемной доли захваченных частиц в случае, если коэффициент захвата выражается следующей зависимостью $\lambda = \lambda_0(1 + \beta\sigma)$:

$$\sigma = \frac{1}{\beta} (e^{(c^* u \lambda_0 \beta t)} - 1). \quad (18)$$

1.3. Фильтрация в околоскважинной зоне пласта

Протекание флюида в околоскважинной зоне (гравийном фильтре) может быть описано моделью фильтрации в цилиндрической системе координат, которая в одномерном случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \varphi_f) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_f \varphi_f v_f) = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_i c_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi_i c_i v_s) = -q_{si}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = q_{si}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (21)$$

$$\varphi_i = \varphi_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j - \frac{\sigma_i}{C_{max}}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (22)$$

$$\varphi_f = \varphi_0 - \sum_{i=1}^n \sigma_i - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i; \quad (23)$$

$$\sigma_i(r, t_0) = 0, c_i(r, t_0) = 0, r \in [r_w, R], i = \overline{1, N}; \quad (24)$$

$$\sigma_i(r = R, t) = 0, t > t_0, i = \overline{1, N}; \quad (25)$$

$$c_i(r = R, t) = C_0(t), t > t_0, i = \overline{1, N}. \quad (26)$$

Здесь r_w – радиус скважины, R – точка пласта, от которой отсчитывается фильтрационное течение.

В этой модели (19) – закон сохранения масс для флюида, (20) – уравнение переноса твердых частиц диаметра d_i , (21) – уравнение захвата твердых частиц типа d_i , (22) – объемная доля поровых каналов, образованная частицами диаметра d_{i-1} , в которых могут перемещаться частицы меньше либо равного d_i , (23) – объемная доля поровых каналов, доступная для флюида, (24) – начальные условия для объемной доли захваченных и взвешенных твердых частиц, (25), (26) – граничное условие для объемной доли захваченных частиц.

Интенсивность застревания q_{si} частиц определяется аналогично соотношениям (3)

$$\begin{aligned} q_{s1} &= \lambda_1 c_1 v = \lambda_0 (1 - \varphi_0 + \beta_0 \sigma_1) c_1 v, \\ q_{si} &= \lambda_i c_i v = \lambda_i (\sigma_{i-1} + \beta_i \sigma_i) c_i v, i = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (27)$$

Радиальная модель фильтрации (19) – (26) должна быть дополнена начальным и граничным условиями для скорости флюида (28), (29), которые соответствуют плоскорадиальному притоку жидкости к скважине

$$v(r, t_0) = \frac{Q}{2\pi r H \varphi_0}, \quad (28)$$

$$v(r = R_w, t) = \frac{Q}{2\pi r_w H \varphi_0}, \quad (29)$$

где Q – дебит вертикальной скважины (объемный расход жидкости в единицу времени), r_w – радиус скважины, H – высота интервала перфорации скважины (перфорация – пробивание отверстий в стенках буровой скважины, интервал перфорации – пробитый отверстиями участок скважины напротив продуктивного пласта, через который флюид поступает в скважину), φ_0 – начальная пористость (Рис. 3)

Для решения задачи радиальной фильтрации, как и для линейной, помимо определения скорости фильтрации необходимо также установить связь между скоростью флюида v_f и скоростью частиц v_s в потоке флюида. В работе сделаны следующие предположения:

- 1) частицы могут находиться в двух состояниях: частицы могут быть мобильными, либо застрявшими в поровых каналах,
- 2) частицы двигаются в потоке исключительно за счет вязких сил флюида без проскальзывания., т.е. $v_s = v_f$, где v_s, v_f – скорость частиц и флюида соответственно.

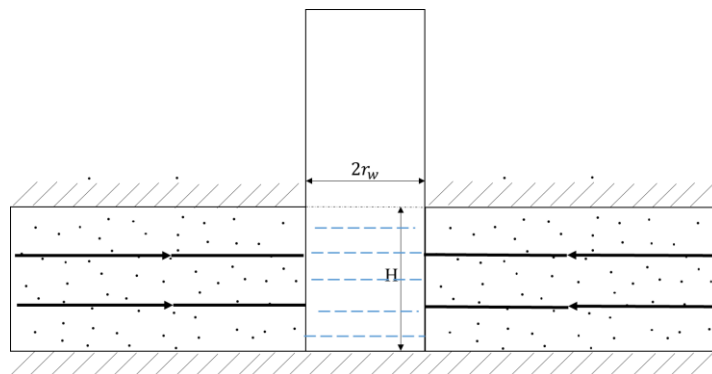


Рис. 3. Схема вертикальной скважины (вид сбоку)

Глава 2. Моделирование образования фильтрационной корки

2.1. Свойства фильтрационной корки

Твердые частицы, диаметр которых превышает диаметр пор, не способны проникнуть в поровое пространство фильтра. Они будут накапливаться на внешней стенке фильтра, образуя фильтрационную корку. В гипотетическом случае отсутствия сжимаемости корки при изменении перепада давления можно моделировать корку следующим образом.

Представим фильтрационную корку как набор слоев $k = \overline{1, N}$ с пористостью φ_i где N – максимально возможное количество типов частиц, не способных проникнуть в фильтр (Рис. 4). Частицы диаметра d_1 образуют первый слой фильтрационной корки, в котором могут застревать частицы диаметра $d_i, i = \overline{2, N}$. По достижению критической пористости, когда частицы типа d_2 более не могут проникнуть в 1 слой фильтра, начинает расти второй слой из частиц 1 и 2 типа и т.д.

Примем, что изменение порового объема, доступного для частиц различных диаметров, проходит по тем же геометрическим закономерностям, что и в нашей работе [18]; это позволяет учесть полидисперсное распределение пластовых частиц в потоке флюида.

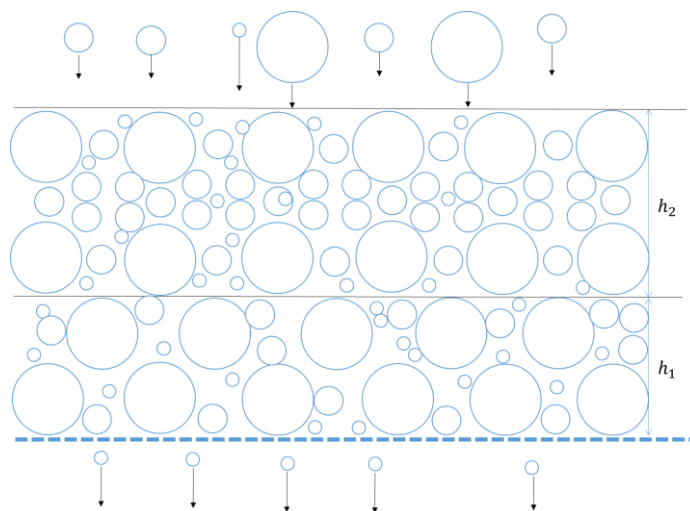


Рис. 4. Схема образования фильтрационной корки

2.2. Математическая модель нарастания фильтрационной корки

Рассмотрим элементарный объем сплошной среды δV , который перемещается со скоростью u в канале с площадью поперечного сечения F , который содержит твердую фазу из механических примесей с плотностью ρ_s , объемная доля примесей во флюиде равна c . С одной стороны, масса примесей до фильтрации определяется как $M_0 = \rho_s c \delta V$. Элементарный объем сплошной среды δV может быть определен через элементарное время δt как $\delta V = u F \delta t$. В гипотетическом случае полного осаждения частиц на поверхности фильтра твердые частицы неупорядоченно упаковываются на поверхности с плотностью упаковки $C_{max} + \sum_{i=2}^n \sigma_i$. Массу примесей можно установить через элементарное приращение слоя корки δh_k как $M_1 = \rho_s (C_{max} + \sum_{i=2}^n \sigma_i) F \delta h_k$. Из баланса масс M_0 и M_1 следует, что $\rho_s c u F \delta t = \rho_s (C_{max} + \sum_{i=2}^n \sigma_i) F \delta h_k$. При устремлении $\delta t \rightarrow 0$ скорость роста отдельного слоя фильтрационной корки будет определяться следующим уравнением:

$$\frac{dh_k}{dt} = \frac{v \sum_{i=1}^N c_i}{C_{max} + \sum_{i=2}^N \sigma_i}; h_{cake} = \sum_{k=1}^N h_k, \quad (30)$$

где h_k – толщина k -го (растущего в текущий момент) слоя фильтрационной корки, $\sum_{i=1}^N c_i$ – объемная доля взвешенных частиц $i = \overline{1, N}$ в потоке флюида, C_{max} – максимальная плотность упаковки частиц любой фракции (Замечание 1), $\sum_{i=2}^N \sigma_i$ – объемная доля частиц типа $i = \overline{2, N}$, которые застряли в фильтрационной корке, h_{cake} – толщина всей фильтрационной корки, составленной из N слоев.

Рост фильтрационной корки представляет собой задачу с динамически изменяющейся границей. В силу трудности дискретизации уравнения неразрывности по координате для определения скорости засорения отдельного слоя фильтрационной корки законы сохранения масс предлагается осреднить по толщине слоя фильтрационной корки.

Процедура осреднения уравнения неразрывности подробно описана в работе [26]. Для произвольной величины f , связанной с частицей жидкости, справедливо следующее соотношение

$$\int_{\Delta V} \rho \frac{df}{dt} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho f dV + \int_{\Delta S} \rho f \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (31)$$

где ΔV – элемент области, занятый жидкой фазой, ΔS – занятая жидкими частицами часть поверхности элементарного объема V , связанного с лабораторной системой координат, через стенки которого перемещаются твердые и жидкие частицы, \vec{n} – нормаль к поверхности S . При этом в левой части уравнения (31) под интегралом стоит материальная производная.

Проведем замену объемных долей взвешенных частиц c_i и захваченных частиц σ_i в уравнениях (6) – (8) на их осредненные по толщине 1-го слоя корки $h \in (0; h_1)$ значения $\langle c_i \rangle_{h_k} = \langle c_i \rangle_{h_1} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} c_i dx$, $\langle \sigma_i \rangle_{h_k} = \langle \sigma_i \rangle_{h_1} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \sigma_i dx$ с учетом (31). Аналогичным образом могут быть также определены осредненные величины $\langle c_i \rangle_{h_k}$, $\langle \sigma_i \rangle_{h_k}$ в остальных слоях корки h_k , $k = \overline{2, N}$.

В уравнениях (6), (7), (8) перейдем к векторной форме и преобразуем левые части

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial t} + \text{div}(\varphi_f \vec{v}_f) \right) dx &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\langle \varphi_f \rangle_{h_1} h_1) + \varphi_f|_{x=h_1} \frac{\partial F_2}{\partial t} - \right. \\ &\varphi_f|_{x=0} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \text{div}(\langle \varphi_f \rangle_{h_1} h_1 \langle \vec{v} \rangle) + (\varphi_f \vec{v})|_{x=h_1} \cdot \text{grad}(F_2) - \\ &\left. (\varphi_f \vec{v})|_{x=0} \cdot \text{grad}(F_1) \right); \end{aligned} \quad (6')$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \left(\frac{\partial(\varphi_i c_i)}{\partial t} + \text{div}(\varphi_i c_i \vec{v}_s) \right) dx &= \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\langle \varphi_i \rangle_{h_1} \langle c_i \rangle_{h_1} h_1) + \right. \\ &\varphi_i c_i|_{x=h_1} \frac{\partial F_2}{\partial t} - \varphi_i c_i|_{x=0} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \text{div}(\langle \varphi_i \rangle_{h_1} \langle c_i \rangle_{h_1} h_1 \langle \vec{v} \rangle) + \\ &\left. (\varphi_i c_i \vec{v})|_{x=h_1} \cdot \text{grad}(F_2) - (\varphi_i c_i \vec{v})|_{x=0} \cdot \text{grad}(F_1) \right); \end{aligned} \quad (7')$$

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} dx = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} (h_1 \langle \sigma_i \rangle_{h_1}) + \sigma_i|_{x=h_1} \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sigma_i|_{x=0} \frac{\partial F_1}{\partial t} \right). \quad (8')$$

Здесь $F_1 = x$ – уравнение неподвижной границы корки, $F_2 = x - h(t)$ – уравнение движущейся границы корки.

Для любой движущейся границы F выполняется соотношение, которое позволяет перейти к материальной производной в осредненных уравнениях

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0. \quad (32)$$

При этом учтем, что слагаемые, содержащие выражение $\frac{\partial F_1}{\partial t}$ в (6') - (8'), обращаются в ноль в силу стационарности границы F_1 .

Интенсивность застревания частиц в уравнениях (3) также осредняется по всему расстоянию h_1

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} q_{si} dx = \frac{1}{h_1} \lambda_0 (\langle \sigma_{i-1} \rangle_{h_1} + \beta_0 \langle \sigma_i \rangle_{h_1}) \langle c_i \rangle_{h_1} v h_1. \quad (33)$$

Таким образом, опуская громоздкие выкладки, система осредненных уравнений (6) - (8) с учетом выражений q_{si} (3) для k -слоя корки будет выглядеть в виде следующей системы (34) – (36) (далее используются обозначения: если у величины есть верхний индекс in , то значение этой величины вычисляется на вход в слой корку h_k , out – на выходе из слоя корки h_k).

Обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее динамику толщины слоя h_k фильтрационной корки со скоростью фильтрации имеет вид:

$$\frac{d}{dt} (\langle \varphi_f \rangle_{h_k} h_k) - \varphi_f^{in} \frac{dh_k}{dt} - v^{in} + v^{out} = 0. \quad (34)$$

Осредненное по толщине слоя h_k обыкновенное дифференциальное уравнение переноса твердых частиц i -го типа имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\langle \varphi_i \rangle_{h_k} \langle c_i \rangle_{h_k} h_k) - (c_i^{in} \varphi_i^{in}) \frac{dh_k}{dt} - (c_i^{in} v^{in}) + (c_i^{out} v^{out}) \\ = -\langle q_{si} \rangle_{h_k} h_k, i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (35)$$

Осредненное по толщине слоя h_k уравнение захвата твердых частиц i -го типа имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(h_k \langle \sigma_i \rangle_{h_k}) - \sigma_i^{in} \frac{dh_k}{dt} = \langle q_{si} \rangle_{h_k} h_k, i = \overline{1, N}. \quad (36)$$

Здесь h_k – толщина k -го слоя фильтрационной корки, $\langle \varphi_f \rangle_{h_k} = (1 - C_{max} - \sum_{i=2}^N \langle \sigma_i \rangle)$ – осредненная по толщине h_k объемная доля пространства, доступная для протекания флюида, $\langle \varphi_i \rangle_{h_k} = 1 - C_{max} - \sum_{s=1}^{i-1} \langle \sigma_s \rangle_{h_k} - \frac{\langle \sigma_i \rangle_{h_k}}{C_{max}}$ – осредненная по толщине h_k объемная доля поровых каналов, образованная частицами типа d_{i-1} , в которых могут перемещаться частицы типа меньше либо равные диаметру d_i , v_{in} – скорость фильтрации на вход в k -ый слой фильтрационной корки, v_{out} – скорость фильтрации на выходе из k -ого слоя фильтрационной корки.

В уравнениях (34) – (36) необходимо определить значения скоростей фильтрации, пористости, объемных долей захваченных и взвешенных частиц на границах слоя корки h_k .

На границе корки и пористой среды пласта не происходит застревание частиц за счет осаждения в поровом пространстве, т.е. $\sigma_i^{in} = 0, i = \overline{1, N}$. Таким образом, можно предположить, что пористость на входе в фильтрационную корку постоянна и определяется исключительно геометрическими свойствами упаковки частиц, т.е. $\varphi_f^{in} = \varphi_i^{in} = 1 - C_{max}, i = \overline{1, N}$.

Для замыкания модели фильтрационной корки и фильтрации в глубине пористой среды необходимо задать момент образования корки на внешней стенке фильтра $x = 0$. Следуя предположению из работы [7], образование

корки будет происходить по достижению критической пористости, равной половине исходного объема пор, т.е. $\varphi_{crit} = \varphi_0/2$.

При осреднении дифференциальных уравнений, описывающих динамику нарастания корки, необходимо задать, какая доля частиц проникает в следующий слой корки/гравийный фильтр. В работе [27] авторы фиксируют постоянную объемную долю взвешенных частиц на выходе из корки, равную половине объемной доли частиц на границе. В силу малой толщины корки преобразуем первое выражение из (17), используя разложение в ряд Тейлора

$$c = c^{in} e^{(-\lambda x)} \approx c^{in} (1 - \lambda x). \quad (37)$$

Также предположим, что производная сохраняет свое значение на всем протяжении корки, тем самым доля взвешенных частиц при прохождении корки можно определить следующими соотношениями:

$$\frac{dc}{dx} \approx \frac{c^{out} - c^{in}}{h_{cake}} = -c^{in} \lambda, \quad (38)$$

$$c^{out} = c^{in} - h_{cake} \lambda c^{in}, \quad (39)$$

В выражениях (37) – (39) c^{out} – объемная доля взвешенных частиц на выходе из слоя корки, c^{in} – объемная доля взвешенных частиц на вход в слой корки, h_{cake} – толщина фильтрационной корки, λ – коэффициент захвата.

Начальные условия в модели фильтрационной корки задаются следующим образом

$$t = 0, \quad h_k = 0, v^{out} = v^{in} = v_0, < c_i >_{h_k} = c_i^{in}, < \sigma_i >_{h_k} = 0. \quad (40)$$

Условие (40) отражает следующие моменты: в начальный момент времени $t = 0$ отсутствует фильтрационная корка, ввиду отсутствия k -го слоя корки скорости на границе слоя равны скорости фильтрации v_0 . При $t = 0$ осредненная по толщине объемная доля взвешенных частиц будет равна объемной доле взвешенных частиц на вход в k -ый слой корки; ввиду отсутствия корки нет захваченных частиц.

Толщина h_k k -слоя корки определялась согласно уравнению (30) по заранее известным значениям скорости фильтрации (закон Дарси) v и C_0 и значениям $\langle \sigma_i \rangle_{h_k}$, которые найдены далее. Уравнения (35) - (36) – это обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, которые вместе с начальным условием (40) решались численно методом Эйлера с пересчетом 2 порядка точности. По найденным значениям $h_k, \langle \sigma_i \rangle_{h_k}, \langle c_i \rangle_{h_k}$ решается линейное относительно переменной v^{out} уравнение (34) с учетом значения, которое является граничные условие v^{in} для $(k-1)$ -го слоя корки.

Проницаемость k' k -го слоя h_k фильтрационной корки определяется следующим образом [10]:

$$k' = k'_0 \left(\frac{d_k}{d_0} \right)^2, \quad (41)$$

где k'_0 – начальная проницаемость, d_k – средний диаметр пор в k -ом слое корки, d_0 – диаметр частиц, составляющих каркас слоя.

Как известно, для слоисто-неоднородных структур средняя проницаемость есть среднее гармоническое проницаемостей слоев структуры [19]. По аналогии среднюю проницаемость k_{cake} всей корки определим как среднее гармоническое проницаемостей слоев

$$k'_{cake} = \frac{h}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k}{k'_k}}. \quad (42)$$

Таким образом, образование фильтрационной корки теперь может быть описано в терминах осредненных объемных долей частиц $\langle \sigma_i \rangle, \langle c_i \rangle$. Модель фильтрационной корки содержит $3N + \sum_{i=1}^N (2(N-i) + 1)$ уравнений, где N – количество типов частиц.

В качестве иллюстрации решения задачи динамики роста фильтрационной корки далее приведен пример расчета динамики фильтрационной корки согласно уравнениям (30), (34) – (36) при следующих параметрах задачи (в системе СИ), который назовем

Набор параметров 1

$$\rho_f = 900 \text{ кг/м}^3; \rho_s = 2700 \text{ кг/м}^3; \mu_0 = 0.02 \text{ Па} \cdot \text{с}; k_0 = 0.3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \\ \lambda = 100 \text{ м}^{-1}; \beta = 10 \text{ м}^{-1}; \varphi_0 = 0.35; C_{max} = 0.7; d_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \gamma = 0.2; \\ C_0 = 10^{-5}, v_0 = 13 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

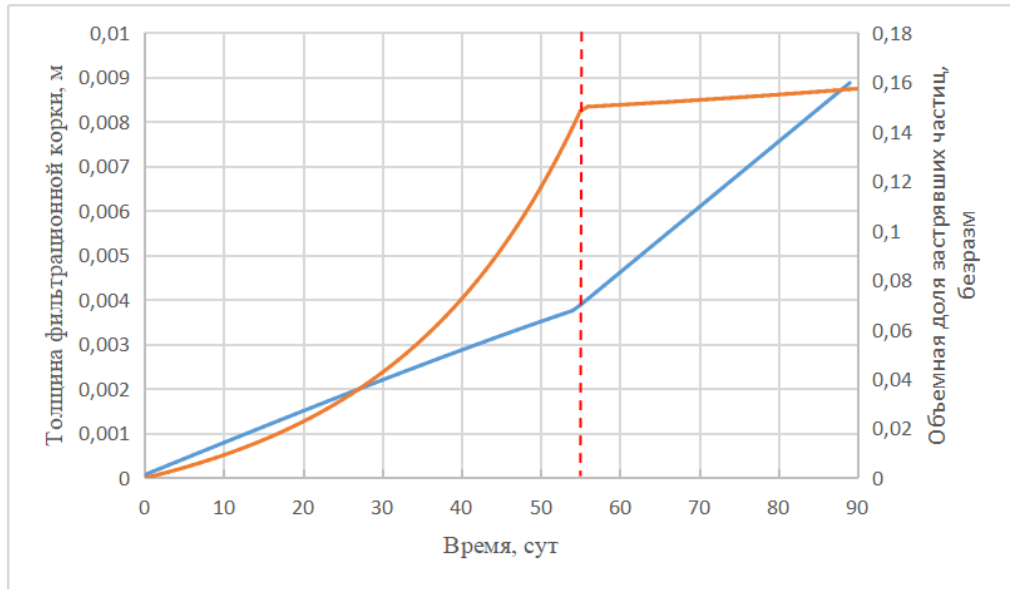


Рис. 5 Динамика нарастания фильтрационной корки

На Рис. 5 кривая синего цвета демонстрирует зависимость толщины фильтрационной корки h_{cake} от времени фильтрации, тогда как кривая оранжевого цвета демонстрирует зависимость объемной доли захваченных частиц $\sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle$ в фильтрационной корке от времени. Пунктирной линией отмечен момент времени ($T = 55$ сут), при котором начинается нарастание слоя корки составленного из частиц d_1 и d_2 . Согласно соотношению (30), при малой доле $\sum_{i=2}^N \sigma_i$ застрявших частиц в корке рост фильтрационной корки должен носить линейный характер, что продемонстрировано на Рис. 5. Смена изгиба кривой роста фильтрационной корки связан с достижением критической пористости в 1 слое корке, после которого частицы 2 типа накапливаются на внешней поверхности корки.

Глава 3. Математическая модель гравийного фильтра

3.1. Численная реализация модели фильтрации в поровом пространстве

Расчет параметров ведется по времени t , координате x и типу частиц i . Для решения системы дифференциальных уравнений фильтрации в поровом пространстве (6) – (8) вводится равномерная пространственно-временная расчетная сетка: по координате x с шагом m , $x_l = lm, l = 0, 1, \dots, L_x$, по времени с шагом τ , $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_t$, где L_x – количество шагов по расстоянию, N_t – количество шагов по времени.

Подстановкой закона фильтрации Дарси (13) в уравнение (6) приходим к следующему дифференциальному уравнению (при этом учтем, что жидкость несжимаема, т.е. $\rho_f = \text{const}$)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(\sum_{i=1}^N \sigma_i)}{\mu(\sum_{i=1}^N c_i)} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi_f}{\partial t}. \quad (43)$$

При условии малой объемной доли взвешенных частиц в потоке флюида изменениями пористости и вязкости можно пренебречь, также учтем, что проницаемость k – это функция от объемной доли захваченных частиц σ_i , которая зависит только от времени t . Тем самым уравнение (36) сводится к дифференциальному уравнению эллиптического вида – уравнению Лапласа (44)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (44)$$

Введем функцию $f(x, t) = \frac{\partial p}{\partial x}$. Из уравнения (37) следует, что $f = C(t)$, где $C(t)$ – константа интегрирования, зависящая от времени.

Для определения констант интегрирования уравнения (37) необходимо задать граничные условия.

$$v = -\frac{k}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = v_0; \quad (45)$$

$$p(t, x = 0) = p_{out}, \quad (46)$$

где L – расстояние фильтрации, p_{out} – давление на внешней границе фильтра $x = 0$.

Таким образом, решение дифференциального уравнения (43) с граничным условием (45) и граничным условием (46) выглядит следующим образом:

$$p = p_{out} - \frac{v_0 \mu_0}{k(t)} x. \quad (47)$$

По полученному полю давлений вычисляется скорость фильтрации в каждой точке пространства согласно уравнению (13).

На каждом временном слое для определения объемной доли частиц в порах определяется поток застревающих частиц q_{si} согласно выражениям (3).

Закон сохранения масс для объемной доли захваченных частиц (7) – это дифференциальное уравнение гиперболического типа, которое аппроксимируется явной разностной схемой против потока

$$\varphi_{i_l}^n \frac{c_{i_l}^{n+1} - c_{i_l}^n}{\tau} + v_l^n \frac{(c_{i_l}^n - c_{i_{l-1}}^n)}{m} = -q_{si_l}^n, v_{i_l}^n > 0, \quad (48)$$

где τ – шаг по времени, m – шаг по координате x , $c_{i_l}^{n+1}$ – объемная доля взвешенных частиц i -го типа в l -ой ячейке на $(n + 1)$ -ом временном слое, $c_{i_l}^n$ – объемная доля взвешенных частиц i -го типа в l -ой ячейке на n временном слое, $c_{i_{l-1}}^n$ – объемная доля взвешенных частиц i -го типа в $(l - 1)$ -ой ячейке на n временном слое,

Устойчивость разностной схемы (41) гарантируется выполнением условия Куранта-Фридрихса-Леви [28], которое для данной задачи имеет следующий вид $Ku = \frac{\max(|v_l^n|)\tau}{m} \leq 1$.

Дифференциальное уравнение для объемной доли захваченных частиц (8) решается в каждой ячейке пространства по координате x явным методом Эйлера с пересчетом, который выполняется в два этапа и для данной задачи будет иметь следующий вид:

$$\text{предиктор: } \tilde{\sigma}_{il}^{n+1} = \sigma_{il}^n + \tau q_{si}(\sigma_{il}^n), \quad (49)$$

$$\text{корректор: } \sigma_{il}^{n+1} = \sigma_{il}^n + \tau \frac{(q_{si}(\sigma_{il}^n) + q_{si}(\tilde{\sigma}_{il}^{n+1}))}{2}. \quad (50)$$

где τ — шаг по времени, $\tilde{\sigma}_{il}^{n+1}$ — объемная доля застрявших частиц i -го типа в l -ой ячейке на $(n + 1)$ -ом временном слое на этапе «предиктор», σ_{il}^n — объемная доля застрявших частиц i -го типа в l -ой ячейке на n временном слое, σ_{il}^{n+1} — объемная доля взвешенных частиц i -го типа в l -ой ячейке на $(n + 1)$ -ом временном слое на этапе «корректор»

3.2. Результаты численного моделирования

Математическая модель гравийного фильтра включает в себя совместный расчет фильтрации в поровом пространстве и послойное расчет образования фильтрационной корки на границе порового пространства. Численное моделирование гравийного фильтра будет проведено для гранулометрического состава, соответствующего песчаной породе. Рассмотрим функцию распределения пластовых частиц по диаметрам (S -образная кривая), построенную от более крупных к более мелким. Перед расчетом определяются реперные диаметры d_1, d_2, \dots, d_n , которые делят график гранулометрического состава на несколько областей. Объемные доли

взвешенных частиц, поступающих на вход, определяются согласно нашей работе [18] по следующему правилу:

$$c_i = \frac{F(d_i) - F(d_{i-1})}{F(d_0) - F(d_N)} c_{in}(t). \quad (51)$$

Здесь F – функция распределения размеров гранул, $c_{in}(t)$ – объемная доля взвешенных частиц всех типов на входе в пористую среду. Функция F находится экспериментально, один из ее видов представлен на (Рис. 6).

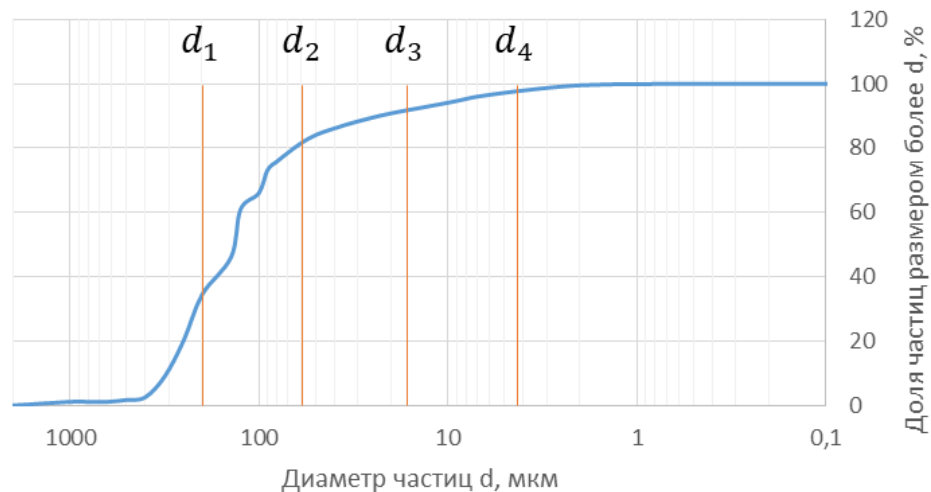


Рис. 6. Гранулометрический состав песчаника с разбиением на реперные диаметры

Следующие расчеты были проведены с использованием набора параметров 2, который включает в себя набор параметров 1, а также характеристики порового пространства фильтра.

Набор параметров 2

$$\begin{aligned} \rho_f &= 900 \text{ кг/м}^3; \rho_s = 2700 \text{ кг/м}^3; \mu_0 = 0.02 \text{ Па} \cdot \text{с}; k_0 = 0.3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \\ \lambda &= 100 \text{ м}^{-1}; \beta = 10 \text{ м}^{-1}; \varphi_0 = 0.35; C_{max} = 0.7; d_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \gamma = 0.3; \\ C_0 &= 10^{-5}, \varphi_0 = 0.35, K_0 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2, L = 0.1 \text{ м}, p = 30 \cdot 10^5 \text{ Па}. \end{aligned}$$

В **Наборе параметров 2** k_0 – начальная проницаемость фильтрационной корки, K_0 – начальная проницаемость гравийной набивки.

В таблице 1 приведены для одних и тех же условий задачи (**Набор параметров 2**), в одни и те же моменты времени (время указано в сутках) объемная доля захваченных частиц σ_I и σ_{II} , типа d_1 , рассчитанные по: σ_I – аналитическому решению (17), σ_{II} – по численному решению уравнения (8). Как следует из таблицы 1, вплоть до 15 суток расхождения минимальны. Дальнейшее расхождение ожидаемо, так как с уменьшением доступного порового пространства увеличивается скорость фильтрации при постоянном расходе, а следовательно интенсивность захвата частиц.

Таблица 1

t, сут	1	2	5	10	15	20
σ_I , безразм	0.0034	0.0069	0.0185	0.043	0.074	0.129
σ_{II} , безразм	0.0034	0.0070	0.0195	0.047	0.088	0.162

На Рис. 7 представлена графики зависимости объемной доли захваченных частиц от расстояния фильтрации при разных времени фильтрации T . Из результатов расчетов видно, что застревание в основном происходит в начале фильтрующего элемента.

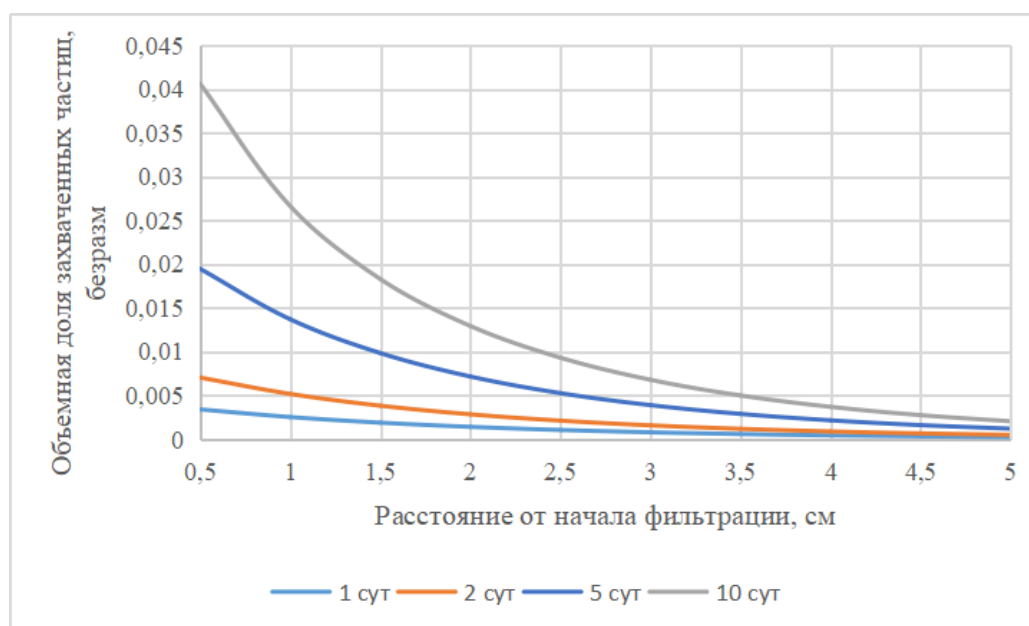


Рис. 7. Зависимость объемной доли захваченных частиц от расстояния фильтрации

В таблице 2 приведено сравнение объемных долей взвешенных частиц $c_1 - c_4$ типа d_1 , рассчитанные по: c_I – аналитическому решению (17), c_{II}, c_{III}, c_{IV} – численному решению уравнения (7). Профиль объемной доли взвешенных частиц вычислен в момент времени $t^* = \frac{L}{v} = 77$ с, когда суспензия достигает границы $x = L$. Условия расчета соответствуют набору параметров 2. Количество узлов по координате x при вычислении объемных долей взвешенных частиц составляло: для $c_{II} - 10$, $c_{III} - 20$, $c_{IV} - 50$. Как следует из Таблицы 2, при увеличении числа узлов, т.е. уменьшении шага дискретизации, численное решение сходится к аналитическому решению (17) уравнения (7).

Таблица 2

x , см	1	2	5	8	10
c_I , безразм	2.33E-06	1.22E-06	1.73E-07	2.47E-08	6.73E-09
$c_{II}(N_x = 10)$	2.72E-06	1.65E-06	3.67E-07	8.16E-08	3.00E-08
$c_{III}(N_x = 20)$	2.56E-06	1.46E-06	2.69E-07	4.97E-08	1.61E-08
$c_{IV}, (N_x = 50)$	2.44E-06	1.32E-06	2.11E-07	3.38E-08	9.96E-09

На Рис. 8 приведены графики зависимости объемной доли взвешенных частиц от расстояния фильтрации, вычисленные в различные моменты времени. Резкое снижение объемной доли, показанное синим графиком, связано с образованием фильтрационной корки, которая не дает самым крупным частицам диаметра d_1 поступать в поровое пространство фильтра.

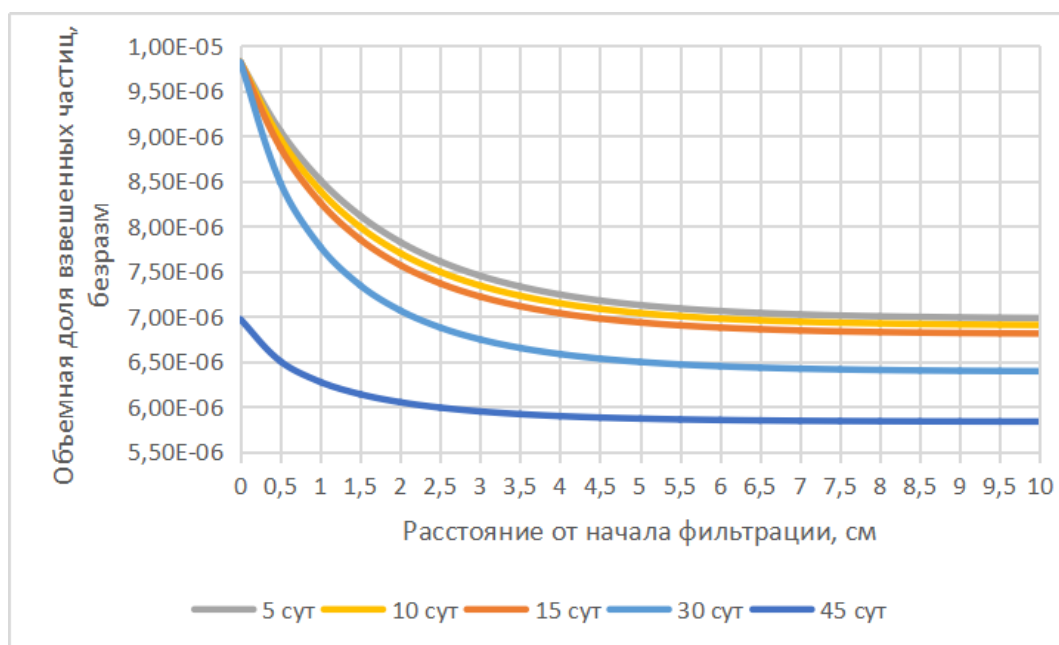


Рис. 8 Зависимость объемной доли взвешенных частиц от расстояния фильтрации

В таблице 3 приведены сравнение объемных долей взвешенных частиц на границе фильтра $x = L$ для частиц различных диаметров $d_1 - d_4$. Данные показывают, что фильтр способен отсеивать только крупные частицы, соответствующие диаметру d_1 . Тогда как существенная часть частиц, соответствующие типам d_2 и d_3 , проходят поровое пространство. Этот факт явно соотносится с формулами (8), в которых интенсивность захвата частиц диаметра d_2, \dots, d_n пропорциональна объемной доле захваченных частиц предыдущего типа.

Таблица 3

Тип частиц	d_1	d_2	d_3	d_4
c_i на вход в фильтр	$2.78E-6$	$3.54E-6$	$2.53E-6$	$9.61E-7$
c_i на выходе из фильтра	$4.72E-9$	$2.90E-6$	$2.48E-6$	$9.6E-7$
Процент частиц, прошедших фильтр	$<1\%$	82%	98%	$\sim 100\%$

В Таблица 4 показана динамика работы фильтра при условии образования фильтрационной корки. По достижению критической пористости, частицы, соответствующие диаметру d_1 , перестают проникать в фильтр, участвуя в образовании фильтрационной корки. За счет захвата частиц в фильтрационной корки, интенсивность засорения пористой среды фильтра уменьшается.

Опираясь на проведенные расчеты, можно показать, что при данном наборе параметров фильтрационная корка увеличила время работы фильтра в 1.5 раза.

Таблица 4

Тип частиц	d_1	d_2	d_3	d_4
c_i на входе в фильтр	$2.78E-6$	$3.54E-6$	$2.53E-6$	$9.61E-7$
c_i на выходе из фильтра	0	$1.22E-6$	$8.96E-7$	$9.6E-7$
Доля частиц, прошедших фильтр	0%	64%	94%	~100%

3.2. Критерий подбора гравийного фильтра

Большая часть существующих методик подбора грануляции фильтров основана на данных о геометрических параметрах частиц породы и соответствующем подборе параметров фильтра. Одно из самых ранних завершенных лабораторных исследований было выполнено R.J.Saucier в 1974 [29]. Им было предложено определять оптимальный размер гравия для фильтра в зависимости от среднего размера пластовых частиц. Согласно критерию Saucier, вынос твердых частиц в скважину будет минимален, когда медианный размер D_{50} гравия в 5-6 раз превышает медианный размер d_{50} частиц пласта ($\frac{D_{50}}{d_{50}} = 5 \sim 6$). Данный критерий хорошо себя зарекомендовал при подборе гравийного фильтра в коллекторах, сложенных хорошосортированными породами (как например песчаниками). Однако, в реальных задачах подбора фильтра приходится использовать гранулы большего размера. В силу своей простоты данный критерий до сих пор используется в нефтегазовой отрасли для подбора гравийных фильтров, хотя он и не учитывает различия в геологическом строение пласта.

В качестве тестовых данных были взяты два гранулометрических состава. Синий график на Рис. 9 соответствует гранулометрическому составу песчаника, серый график отображает гранулометрический состав мергелистого песчаника.

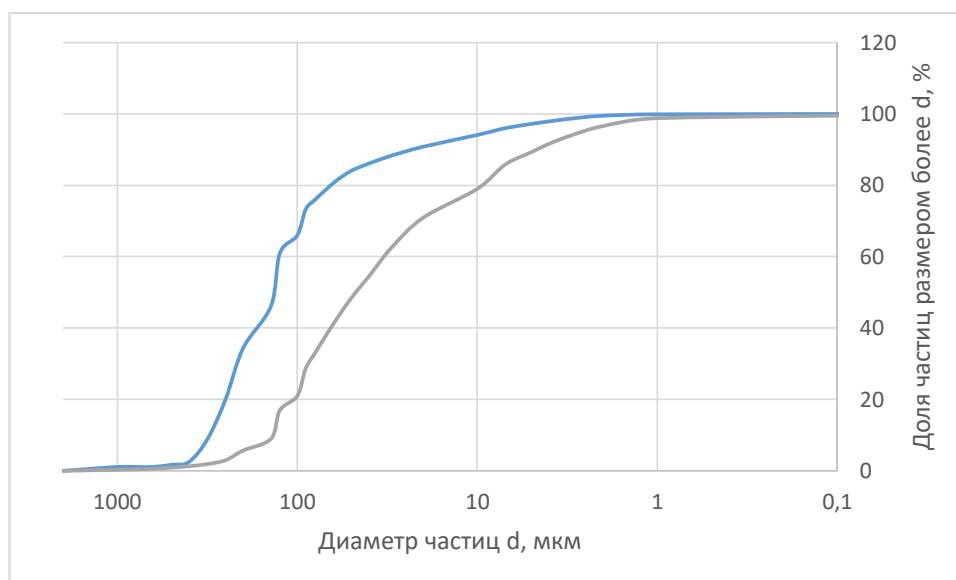


Рис. 9. Гранулометрический состав пластовых частиц

Для них было проанализировано относительное падение проницаемости гравийного фильтра в зависимости от соотношения D_{50}/d_{50} , а также накопленная доля прошедшего песка через фильтр.

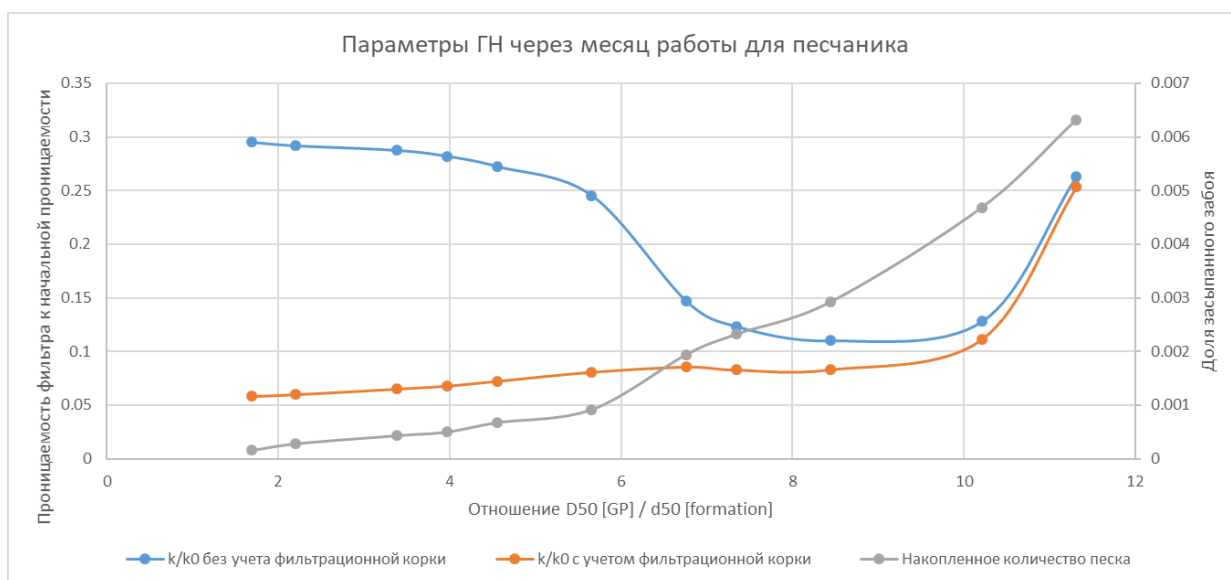


Рис. 10. Взаимосвязь проницаемости фильтра и накопленной доли прошедшего песка при фильтрации флюида с песчаником

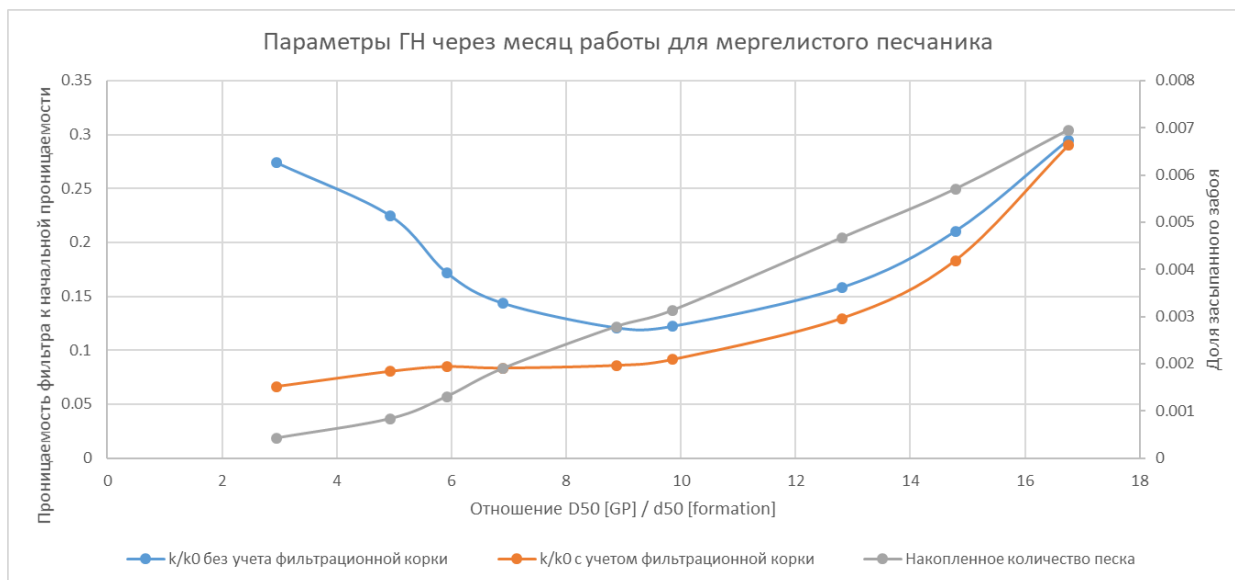


Рис. 11. Взаимосвязь проницаемости фильтра и накопленной доли песка при фильтрации флюида с мергелистым песчаником

Рассмотрим задачу подбора гравийного фильтра в случае песчаника. Как следует из Рис. 10, существует некоторый диапазон $\frac{D_{50}}{d_{50}} \in (8; 10)$, при котором проницаемость самого фильтра достигает минимума. Для увеличения продолжительности работы фильтра необходимо увеличить его проницаемость. Согласно Рис. 10, это может быть сделано как увеличением, так и уменьшением размера гранул фильтра. Однако, стоит заметить, что фильтрационная корка оказывает существенное влияние на проницаемость фильтра, снижая ее в 3 раза для самых мелких гравийных набивок.

При постоянстве медианного размера частиц пласта d_{50} для оптимизации подбора фильтра необходимо варьировать размер гранул фильтра, то есть значение D_{50} . С одной стороны, снижение D_{50} приводит к снижению начальной проницаемости фильтра, как это показано в работе Fischer et al. [30]. Одновременно с этим эффектом больше частиц будет накапливаться в фильтрационной корке, тоже снижая проницаемость системы корка-фильтр, как это показано на Рис. 10. При увеличении значения D_{50} все больше частиц будет свободно проходить поровое пространство фильтра, образуя песчаную

пробку в скважине. Для случая фильтрации флюида с мергелистым песчаником Рис. 11 рассуждения аналогичны.



Рис. 12 Зависимость проницаемости гравийного фильтра при фильтрации флюида с частицами от соотношения D_{50}/d_{50}

На Рис. 12 синим цветом обозначена рассчитанная в настоящей работе зависимость проницаемости гравийного фильтра при фильтрации песчаника, голубым цветом – при фильтрации мергелистого песчаника, а красным графиком отражена динамика проницаемости гравийного фильтра, которая была экспериментально получена в работе [30]. Характер поведения графиков на Рис. 12 при изменении соотношения $\frac{D_{50}}{d_{50}}$ совпадает, однако минимум красного графика достигается вблизи значения $\frac{D_{50}}{d_{50}} \approx 12$, что может быть связано с различием в гранулометрическом составе породы, использовавшейся в исследовании. Стоит заметить, что для песчаника ширина «впадины» существенно меньше, хотя общее снижение проницаемости схоже для обеих пород. Это связано с тем, что для более хорошо сортированных пород (т.н. песчаник) диапазон размеров пор, которые задерживают частицы существенно меньше, чем для плохосортированных.

ВЫВОДЫ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы была рассмотрена математическая модель нарастания фильтрационной корки. Несмотря на принятые упрощения (несжимаемость флюида и корки, послойное нарастание корки на стенке фильтра) эта модель позволяет учесть снижение доли песка в притоке при прохождении суспензии сквозь корку, а также оценить влияние корки на проницаемость фильтрующей системы. В данной работе была также исследована математическая модель гравийного фильтра, представляющая собой объединение модели фильтрационной корки и модели глубинной фильтрации. Модель позволяет определять связь между снижением проницаемости и долей песка, прошедшей фильтр для пород различных гранулометрических составов. Разработанная модель гравийного фильтра позволяет найти оптимальный медианный размер гранул фильтра в зависимости от свойств фильтрующейся породы. Таким образом, созданная математическая модель вносит существенный вклад в решение задачи подбора фильтра на месторождениях, осложненных выносом песка в скважину.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проделанной работы были получены следующие результаты:

- Разработана физико-математическая модель образования фильтрационной корки.
- Разработаны программные модули образования фильтрационной корки и фильтрации в поровом пространстве.
- Проведено объединение моделей фильтрации для моделирования работы гравийного фильтра.
- Проведен анализ работы гравийного фильтра на типичных параметрах для месторождений.
- Проведена оценка оптимального диаметра гранул гравийного фильтра в зависимости от гранулометрического состава породы

В дальнейшем расчетные модули могут быть усовершенствованы путем учета таких физических эффектов как сжимаемость флюида, наличие газа в притоке жидкости, фильтрация по закону Форхгеймера при высоких скоростях флюида.

Критерий подбора фильтра также может быть дополнен оценкой пересыпания забоя скважины, так как частицы, прошедшие гравийный фильтр, при недостаточном дебите будет оставаться в скважине, снижая ее продуктивность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Darcy H.** Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Exposition et Application des Principes a Suivre et des Formules a Employer dans les Questions de Distribution d'Eau. Paris: Dalmont V.Ed, 1856. 647 с.
2. **Лейбензон Л. С.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947.
3. **Христианович С. А.** Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. Т.4, вып.1. 1940. С.33–52.
4. **Нигматулин Р.И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
5. **Herzig J.P., Lecrerc D. M., Le Goff P.L.** Flow of suspension through porous media - application to deep filtration // Industrial and Engineering Chemistry. 1970. №625. С. 8-35.
6. **Rajagopalan R., Tien C.** Trajectory analysis of deep bed filtration with the sphere in-cell porous media model // AIChE Journal. 1976. №22. С. 523-533.
7. **Wennberg K.E., Sharma M.M.** Determination of the Filtration Coefficient and the Transition Time for Water Injection Wells // SPE European Formation Damage Conference. 1997. С. 353-364.
8. **Tien C.** Introduction to cake filtration. Elsevier Science, 2006. 292 с.
9. **Jiao D., Sharma M.M.** Mechanism of Cake Buildup in Crossflow Filtration of Colloidal Suspensions // Journal of Colloid and Interface Science. Elsevier. №162. С. 454-462.
10. **Suri A., M.M. Sharma** Strategies for Sizing Particles in Drilling and Completion Fluid // SPE European Formation Damage Conference. The Hague: 2004.

11. **Sacramento R., Yang Y., You Z. et al.** Deep bed and cake filtration of two-size particle suspension in porous media // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2015. №126. С. 201-210.
12. **Boronin S.A., Osiptsov A.A. and Tolmacheva K.I.** Multi-fluid model of suspension filtration in a porous media [Journal] // Fluid Dynamics. - 2015. - 6 : Vol. 50. - pp. 759-768
13. **Tolmacheva K.I., Boronin S.A., Osiptsov A.A.** Multi-fluid model for suspension filtration in porous media: effects of particle trapping and mobilization // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2017. №115. С. 153-159
14. **Iwasaki T.** Some notes on sand filtration // J. of the American WaterWorks Association. 1937. №29. С. 1591-1602.
15. **Mackie R.I., Horner R.M.W, Jarvis R.J.** Dynamic modelling of Deed-Bed-Filtration // AIChE Journal. 1985. №11. С. 1761-1775.
16. **Рыжиков Н.И.** Экспериментальное исследование динамики захвата частиц и изменения проницаемости при фильтрации суспензии через пористую среду: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 25.00.10. М., 2014. 150 с.
17. **Forchheimer Ph.** Hydraulics. Leipzig–Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1914.
18. **Хасанов М.М., Лежнев К.Э., Роцектаев А.П., Пашкин В.Д.** Применение новой модели многокомпонентной суспензии для расчета скин-фактора на скважинах, оборудованных гравийными фильтрами // Нефтяное хозяйство. 2018. №1142. С. 63-67.
19. **Лежнев К.Э., Пашкин В.Д., Роцектаев А.П.** Интегрированная модель процесса выноса песка в системе пласт – фильтр – скважина // Российская Нефтегазовая Техническая Конференция SPE. М.: 2019.

20. **Слоэн, Н. Дж. А.** Упаковка шаров // В мире науки: Scientific American. Издание на русском языке. 1984. №3. С. 72-82.
21. **Slichter C.S.** Theoretical investigation of the motion of ground waters // U.S. Geol. Surv. Annu. Rep. Washington: U.S. Gov. Print. Office, 1899. С. 295-384.
22. **Москалев П.В., Шитов В.В.** Математическое моделирование пористых структур. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 120 с.
23. **Азиз Х., Сеттари Э.** Математическое моделирование пластовых систем. Пер. с англ изд. М.: Недра, 1982. 407 с.
24. **Osiptsov A.A.** Hydraulic fracture conductivity: effects of rod-shaped proppant from lattice-Boltzmann simulations and lab tests // Advances in Water Resources. 2017. №104. С. 293-303.
25. **Scott K.J.** Hindered Settling of a Suspension of Spheres: Critical Evaluation of Equations Relating Settling Rate. Council for Scientific and Industrial Research, 1984.
26. **Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.** Механика насыщенных пористых сред. М.: изд-во "Недра", 1970. 339 с.
27. **Corapcioglu M.Y, Abboud N.M.** Cake Filtration with Particle Penetration at the Cake Surface // SPE Reservoir Engineering. 1990.
28. **Курант Р., Фридрихс К., Леви Г.** О разностных уравнениях математической физики // УМН. 1941. №8. С. 125-160.
29. **Saucier R.J.** Considerations in Gravel Pack Design // Journal of Petroleum Technology. 1974. №26. С.205-212.
30. **Fischer C., Constien V., Vining C.** Gravel-Pack-Sizing Criteria: It's Time To Re-Evaluate // SPE International Conference and Exhibition on Formation Damage Control. 2016.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список обозначений

λ, β — коэффициенты захвата, м^{-1}

k_0 — коэффициент проницаемости пористой среды, м^2

μ — коэффициент динамической вязкости, $\text{Па} \cdot \text{с}$

∇p — градиент давления, Па

\vec{v} — скорость фильтрации, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$

d_i — диаметр частиц, соответствующих типу i , м

d_0 — размер гранул гравийного фильтра, м

γ — коэффициент упаковки частиц, безразм

ρ_f — плотность несущего флюида, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

ρ_f^0 — плотность флюида при некотором давлении p_0 , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

φ_0 — начальная пористость гравийного фильтра, безразм.

σ_i — объемная доля застрявших твердых частиц размера d_i , безразм

c_i — объемная доля подвижных твердых частиц в потоке, безразм

φ_i — объемная доля поровых каналов, в которых могут двигаться твердые частицы размером d_i , безразм

ρ_s — плотность твердых частиц, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

q_{si} — интенсивность застревания твердых частиц, $\frac{1}{\text{с}}$

v_f — скорость флюида, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$

v_s — скорость твердых частиц, $\frac{м}{с}$

C_{max} — максимальная плотность упаковки частиц в монодисперсной системе

c_{in} — объемная доля взвешенных частиц на вход в поровое пространство, безразм

Q — дебит вертикальной скважины, $\frac{м^3}{сут}$

R_w — радиус скважины, м

H — высота интервала перфорации скважины, м

$f(\sigma)$ — плотность упаковки частиц в фильтрационной корке, безразм

h_k — толщина k -го слоя фильтрационной корки, м

h_{cake} — толщина фильтрационной корки, м

$\langle \sigma_j \rangle_{h_k}$ — объемная доля застрявших частиц, осредненная по толщине k -го слоя фильтрационной корки (далее вместо *осредненная по толщине i -го слоя фильтрационной корки* используется *осредненная*), безразм

$\langle c_j \rangle_{h_k}$ — осредненная объемная доля взвешенных частиц

σ_i^{in} — объемная доля застрявших частиц на входе в k -ый слой корки, безразм

c_i^{in} — объемная доля взвешенных частиц на входе в k -ый слой корки, безразм

φ_f^{in} — пористость, доступная для протекания флюида на входе в k -ый слой корки, безразм

φ_i^{in} — объемная доля поровых каналов, образованная частицами типа d_{j-1} , в которых могут перемещаться частицы типа d_j , безразм

φ_{crit} — критическая пористость, при которой начинается образование нового слоя корки, безразм